

[21-BA 428-A/21-BS 432-A]

AT THE END OF FOURTH SEMESTER (CBCS PATTERN)

MATHEMATICS – IV(A) – REAL ANALYSIS

(COMMON FOR B.A., B.Sc.)

UG PROGRAM (4 YEARS HONORS)

(w.e.f. Admitted batch 2020-21)

Time: 3 Hours

Maximum: 75 marks

SECTION A — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE of the following questions.

1. If $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ then show that $\{S_n\}$ converges.

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ అయితే అనుక్రమము $\{S_n\}$ అభిసరిస్తుందని చూపుము.

2. Prove that every convergent sequence is bounded.

అభిసరించే ప్రతి అనుక్రమం పరిబద్ధం అని చూపండి.

3. Test for the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$ యొక్క అభిసరణతను పరిశీలించండి.

4. If $f: [a, b] \rightarrow R$ is continuous then show that it is uniformly continuous on $[a, b]$.

$f: [a, b] \rightarrow R$ అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయం అయితే అది $[a, b]$ పై ఏకరీతి అవిచ్ఛిన్నమని చూపండి.

5. Show that $f(x) = |x-1| + |x-2|$ is not derivable at $x=1, 2$.

ప్రమేయం $f(x) = |x-1| + |x-2|$ అనేది $x=1, 2$ వద్ద అవకలనీయం కాదు అని చూపండి.

6. Verify Cauchy Mean value theorem for $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ on $[a, b]$ where $0 < a < b$.

$f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ప్రమేయాలు $[a, b]$ లో కోషి మధ్య మూల సిద్ధాంతాన్ని $0 < a < b$ పరిచూడండి.

7. If $f(x) = x$ on $[0, 1]$ and $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ then find $U(P, f)$ and $L(P, f)$.

$[0, 1]$ పై $f(x) = x$ మరియు $P = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ అయిన $U(P, f)$ మరియు $L(P, f)$

కనుగొనుము.

8. Show that the function f defined by $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ is not integrable.

$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ గా నిర్వచించబడిన ప్రమేయం f సమాకలనీయం కాదని చూపుము.

SECTION B — (5 × 10 = 50 marks)

Answer ALL the questions.

9. (a) Prove that a monotonic sequence is convergent if and only if it is bounded.

ఏక దిష్ట అనుక్రమము అభిసరించుటకు ఆవశ్యకత పర్యాప్త నియమము అది పరిబద్ధము అగునని చూపుము.

Or

(b) State and prove Cauchy's general principle of convergence.

అభిసరణ యొక్క కౌషి సాధారణ సూత్రాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించుము.

10. (a) State and prove Cauchy's n^{th} root test.

కౌషి n వ వర్గమూలము సిద్ధాంతంను ప్రవచించి నిరూపించుము.

Or

(b) Test for convergence of $\sum \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots 3n}{7 \cdot 10 \cdot 13 \dots (3n+4)} x^n$ for $x > 0$.

$x > 0$, $\sum \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots 3n}{7 \cdot 10 \cdot 13 \dots (3n+4)} x^n$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించుము.

$$f(x) = \frac{\sin(a+1)x + \sin x}{x}, x < 0$$

$$= c, x = 0$$

$$= \frac{(x+bx^2)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{bx^{\frac{3}{2}}}, x > 0$$

11. (a) Let $f: R \rightarrow R$ be such that

Determine the values of a, b, c for which the function is continuous at $x=0$.

$$f(x) = \frac{\sin(a+1)x + \sin x}{x}, x < 0$$

$$= c, x = 0$$

$$= \frac{(x+bx^2)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{bx^{\frac{3}{2}}}, x > 0$$

ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నమయితే a, b, c విలువలను కనుక్కోండి.

Or

(b) If f is continuous on $[a, b]$ then show that f is bounded on $[a, b]$ and attains its bounds.

$[a, b]$ మీద f అవిచ్ఛిన్నమైతే, $[a, b]$ మీద f పరిబద్ధము. అపుడు అది మరియు దాని ఖచ్చితపు హద్దులను కలిగి ఉంటుందని చూపండి.

12. (a) State and prove Lagrange's Mean value theorem.

అవకలనీయత పై లెగ్రాంజి మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతంను ప్రవచించి, నిరూపించండి.

Or

(b) Verify Rolle's theorem on the interval $[a, b]$ for the function

$$f(x) = (x-a)^m(x-b)^n; m, n \text{ being positive integers.}$$

$f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$, m, n లు ధన పూర్ణాంకాలు అగునట్లు $[a, b]$ లో రోలే సిద్ధాంతాన్ని సరి చూడండి.

13. (a) If $f: [a, b] \rightarrow R$ is monotonic on $[a, b]$ then show that f is R -integrable on $[a, b]$.

$f: [a, b] \rightarrow R$ అను ప్రమేయము, $[a, b]$ లో ఏకదిష్టము అయితే $[a, b]$ లో f రీమన్ సమాకలనము అని చూపండి.

Or

(b) Show that a bounded function $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is Riemann integrable on $[a, b]$ if and only if for each $\epsilon > 0$ there exists a partition

$P \in \mathcal{P}[a, b]$ such that $0 \leq U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ పరిబద్ధ ప్రమేయం $[a, b]$ మీద రీమాన్ సమాకలనం కావడానికి అవశ్యక పూర్వ నియమం ప్రతి $\epsilon > 0$ అనుగుణంగా $0 \leq U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$ అయ్యేపట్టు $P \in \mathcal{P}[a, b]$ వ్యవస్థితం అని చూపండి.